Défi SECDEG 01 **Déterminer les entiers naturels x tels que :**

$$x^2+(10-x)^2=68$$

Corrigé

$x^2+(10-x)^2=68$
$\Leftrightarrow x^2+100-20x+x^2=68$
$\Leftrightarrow 2x^2-20x+100-68=0$
$\Leftrightarrow 2x^2-20x+32=0$
$\Leftrightarrow 2(x^2-10x+16)=0$
$\Leftrightarrow x^2-10x+16=0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2-25+16=0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2-9=0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2-3^2=0$
$\Leftrightarrow (x-5+3)(x-5-3)=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-8)=0$
$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } x-8=0$
$\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=8$

Or $2\in\mathbb{N}$ et $8\in\mathbb{N}$ donc les solutions de l'équations sont des entiers naturels. On peut aussi utiliser la méthode plus habituelle du discriminant.

Défi SECDEG 02 **Déterminer les entiers naturels x tels que :**

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=2\,030$$

Corrigé

On a les équivalences :

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=2\,030$
$\Leftrightarrow x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=2\,030$
$\Leftrightarrow 3x^2+6x+5-2\,030=0$
$\Leftrightarrow 3x^2+6x-2025=0$
$\Leftrightarrow 3(x^2+2x-675)=0$
$\Leftrightarrow x^2+2x-675=0$
$\Leftrightarrow (x)^2+2(x)(1)+(1)^2-1-675=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2-676=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2-(26)^2=0$
$\Leftrightarrow (x+1+26)(x+1-26)=0$
$\Leftrightarrow (x+27)(x-25)=0$
$\Leftrightarrow x+27=0 \text{ ou } x-25=0$
$\Leftrightarrow x=-27 \text{ ou } x=25$

Or $-27\notin\mathbb{N}$ donc est refusé et $25\in\mathbb{N}$ donc est accepté, donc : $S_{\mathbb{N}}=\{25\}$.
On peut aussi utiliser la méthode plus habituelle du discriminant.

Vérification

Défi SECDEG 03 **On note (E) l'équation d'inconnue réelle x :**

$$x^2\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)x-4\sqrt{2}=0$$

Montrer que (-1) est une solution puis déterminer la seconde solution.

Corrigé

1. $x^2\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)x-4\sqrt{2}=0$

Calculons la valeur prise par le membre de gauche lorsque $x=-1$:

$$(-1)^2\times\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)\times(-1)-4\times\sqrt{2}$$
$$=1\times\sqrt{6}-\sqrt{6}+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}=0$$

On constate que : $(-1)^2\times\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)\times(-1)-4\times\sqrt{2}=0$

donc (-1) et bien une solution de l'équation (E).

2. L'équation (E) : $x^2\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)x-4\sqrt{2}=0$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{6}-4\sqrt{2}$ et $c=-4\sqrt{2}$

La formule du produit des racines s'écrit :

$$x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

Or, on a montré que $x_1=-1$ est l'une des solutions, donc :

$$(-1)\times x_2=\frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$
$$x_2=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

La deuxième solution de (E) est : $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Autres méthodes possibles

On peut utiliser la formule de la somme des racines ce qui amène à des calculs un peu délicats (à faire pour s'entrainer) pour obtenir la forme simplifiée de x_2 ou bien on peut utiliser la méthode habituelle du discriminant (à faire pour s'entrainer) qui amènerait ici à des calculs assez délicats.

Défi SECDEG 04 **$\mathcal{P}$ est la parabole représentative de f dans un repère orthogonal avec, pour tout réel x : $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;6)$. Étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$: nombre de point(s) en commun et coordonnées de ce(s) point(s).**

__Corrigé__

La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-1}{3-(-2)} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

On obtient donc : $y = 1\big(x - (-2)\big) + 1$ qui s'écrit aussi : $y = x + 2 + 1$ soit finalement $y = x + 3$. Pour étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ il s'agit de résoudre le système : $\begin{cases} y = x + 3 \quad (*) \\ y = f(x) \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases}$.

Par comparaison :

$x + 3 = -x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x + 3 + x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation $(*)$: $y = 1 + 3 = 4$.

La parabole $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ ont un seul point en commun : $I(1\,;4)$.

Défi SECDEG 05 **Équation avec paramètre**

(E_m) est l'équation d'inconnue x : $x^2 + (m+1)x + 5m^2 + 1 = 0$ où m est un paramètre réel : existe-t-il une valeur de m pour laquelle (E_m) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$?

__Corrigé__

$x^2 + (m+1)x + 5m^2 + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = m + 1$ et $c = 5m^2 + 1$, de discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta_m &= b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4(1)(5m^2+1)\\ &= m^2 + 2m + 1 - 4(5m^2+1) = m^2 + 2m + 1 - 20m^2 - 4\\ &= -19m^2 + 2m - 4\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\Delta_m = -19m^2 + 2m - 4$.

$-19m^2 + 2m - 4$ est de la forme $am^2 + bm + c$ avec $a = -19$, $b = 2$ et $c = -4$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-19)(-4) = -224$

$\Delta < 0$ donc : $-19m^2 + 2m - 4$ n'a pas de racine réelle.

Or, lorsque $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle elle est du signe de a et ne s'annule pas, donc : $-19m^2 + 2m - 4$ est du signe de -19 et ne s'annule pas : pour tout $m \in \mathbb{R}$, $-19m^2 + 2m - 4 < 0$

Conclusion : **quel que soit $m \in \mathbb{R}$, (E_m) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.**

Défi SECDEG 06 **Dans le plan est muni d'un repère orthogonal, on donne $A(1;3)$, $B(4;9)$, et note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)(-x+6)$: déterminer les coordonnées du ou des point(s) commun(s) à $\mathcal{P}$ et (AB).**

__Corrigé__

Une équation de la droite (AB) est $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

On obtient : $y = 2(x-1) + 3$ qui s'écrit aussi : $y = 2x + 1$.

La droite (AB) admet pour équation réduite : $y = 2x + 1$.

Les coordonnées des points communs à $\mathcal{P}$ et (AB) sont les solutions du système : $\begin{cases} y = ax + b \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = (2x+3)(-x+6) \end{cases}$

d'où par comparaison :

$2x + 1 = (2x+3)(-x+6) \Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 12x - 3x + 18$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 9x + 18 \Leftrightarrow 2x + 1 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 17 = 0$

$2x^2 - 7x - 17$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -7$ et $c = -17$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-17) = 49 + 136 = 185$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 - \sqrt{185}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 + \sqrt{185}}{4}$$

• si $x = \frac{7-\sqrt{185}}{4}$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7 - \sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7 - \sqrt{185} + 2}{2} = \frac{9 - \sqrt{185}}{2}$$

• si $x = \frac{7+\sqrt{185}}{4}$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7+\sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7+\sqrt{185}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7+\sqrt{185}+2}{2}$$
$$= \frac{9+\sqrt{185}}{2}$$

Conclusion

$\mathcal{P}$ et (AB) ont en commun les deux points :

$$E\left(\frac{7-\sqrt{185}}{4} ; \frac{9-\sqrt{185}}{2}\right) \text{ et } F\left(\frac{7+\sqrt{185}}{4} ; \frac{9+\sqrt{185}}{2}\right)$$

1	f(x):=(2x+3)(-x+6) → $f(x) := -2x^2 + 9x + 18$
2	A:=(1,3) → $A := (1,3)$
3	B:=(4,9) → $B := (4,9)$
4	d:=Droite(A, B) → $d : y = 2x + 1$
5	Intersection(f, d) → $\left\{\left(\frac{-\sqrt{185}+7}{4}, \frac{-\sqrt{185}+9}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{185}+7}{4}, \frac{\sqrt{185}+9}{2}\right)\right\}$

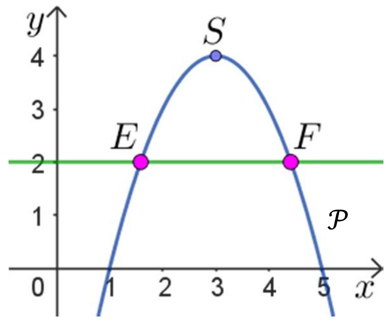
Défi SECDEG 07

Dans un repère orthogonal d'origine O on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

On note S le sommet de $\mathcal{P}$, E et F les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite d'équation $y = 2$ avec $x_E < x_F$.

La droite (ES) passe-t-elle par le point O ?



Corrigé

• déterminer les coordonnées de S

Avec les notations habituelles on a $S(\alpha;\beta)$ où :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$
$$\beta = f(\alpha) = f(3) = -(3)^2 + 6(3) - 5 = -9 + 18 - 5 = 4$$

Conclusion : $\boldsymbol{S(3\,;4)}$.

• déterminons les coordonnées de E

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et d sont les solutions du système : $\begin{cases} y = 2 \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = 2 \\ y = -x^2 + 6x - 5 \end{cases}$, d'où par comparaison : $-x^2 + 6x - 5 = 2$, qui s'écrit aussi : $-x^2 + 6x - 7 = 0$.

$-x^2 + 6x - 7$ est de la forme $ax^2 + bx = c = 0$ avce $a = -1$, $b = 6$ et $c = -7$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-1)(-7) = 36 - 28 = 8$$

$\Delta > 0$ donc $-x^2 + 6x - 7$ admet deux racines réelles distinctes.

On a : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-2\sqrt{2}}{2(-1)} = \frac{-2(3+\sqrt{2})}{-2 \times 1} = 3 + 2\sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+2\sqrt{2}}{2(-1)} = \frac{-2(3-\sqrt{2})}{-2 \times 1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Or $x_E < x_F$ et $y_E = y_F = 2$ donc : $E(3-\sqrt{2}\,;2)$ et $F(3+\sqrt{2}\,;2)$, en particulier $\boldsymbol{E(3-\sqrt{2}\,;2)}$.

• **les points O, E et S sont-ils alignés ?**

Méthode 1 : utilisation de vecteurs

$$\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} x_E - x_O \\ y_E - y_O \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{2}-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient de même : $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\det(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OS}) = \begin{vmatrix} 3-\sqrt{2} & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3-\sqrt{2})(4)-(3)(2) = 12-4\sqrt{2}-6$$
$$= 6-4\sqrt{2}$$

On constate que $\det(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OS}) \neq 0$ donc $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OS}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les points O, E et S ne sont pas alignés, autrement dit **la droite (ES) ne passe pas par le point O.**

Méthode 2 [N.R.]

On cherche l'équation réduite de (EF) et on constate que son ordonnée à l'origine est non nulle, ce qui permet d'en déduire qu'elle ne passe pas par l'origine O du repère.

Défi SECDEG 08 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1} \leqslant \frac{x^2}{x^2-1}$$

Corrigé

• recherche des valeurs interdites

Il faut que : $x-1 \neq 0$, $x+1 \neq 0$ et $x^2-1 \neq 0$, c'est-à-dire : $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

• Pour x différent de -1 et de 1 on a les équivalences

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1} \leqslant \frac{x^2}{x^2-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1} \leqslant 0-\frac{x^2}{x^2-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1\times(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5(x-1)-x^2}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5x-5-x^2}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-4}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$$

[N.R.] $-x^2+6x-4$ admet pour racines :

$3-\sqrt{5}(\approx 0{,}76)$ et $3+\sqrt{5}$ $(\approx 5{,}24)$

Règle : « $ax+b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$3-\sqrt{5}$		1		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
$-x^2+6x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions :

$$\boldsymbol{S =]-\infty;-1[\ \cup\ [3-\sqrt{5};1[\ \cup\ [3+\sqrt{5};+\infty[}$$

1 1/(x-1)+5/(x+1)<=x²/(x²-1)

Résoudre: $\left\{x<-1, -\sqrt{5}+3 \leq x < 1, x \geq \sqrt{5}+3\right\}$

Défi SECDEG 09 **Résoudre l'inéquation :**

$$\boldsymbol{x^2-x+1 \leqslant \frac{x+3}{3x+1}}$$

Corrigé

• **recherche de valeur(s) interdite(s)**

Il faut que : $3x+1 \neq 0$,c'est-à-dire : $x \neq -\frac{1}{3}$.

• **résolution**

Pour $x \neq -\frac{1}{3}$ on a les équivalences :

$$x^2-x+1 \leqslant \frac{x+3}{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2-x+1-\frac{x+3}{3x+1} \leqslant \frac{x+3}{3x+1}-\frac{x+3}{3x+1}$$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x + 1)(3x+1)}{3x+1} - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x + 1)(3x+1) - (x+3)}{3x+1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^3 + x^2 - 3x^2 - x + 3x + 1 - x - 3}{3x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 2}{3x+1} \leqslant 0$

Remarquons que $3x^3 - 2x^2 + x - 2$ s'annule pour $x = 1$ (et peut-être pour d'autres valeurs de x) donc on recherche une factorisation par $(x-1)$, il existe une constante réelle b telle que :

$$3x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-1)(3x^2 + bx + 2)$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + bx^2 + 2x - 3x^2 - bx - 2$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + (b-3)x^2 + (2-b)x - 2$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} b - 3 = -2 \\ 2 - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 + 3 \\ -b = 1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1$$

L'inéquation de départ est donc équivalente à :

$$\frac{(x-1)(3x^2 + x + 2)}{3x+1} \leqslant 0$$

• $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• $3x^2 + x + 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)(2) = 1 - 24 = -23$

$\Delta < 0$ donc $3x^2 + x + 2$ n'a pas de racine réelle.

Règle (dans le cas $\Delta < 0$) : « $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a et ne s'annule pas ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2 + x + 2$		$+$		$+$		$+$	
$3x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions : $\boldsymbol{S = \left] -\frac{1}{3} \,; 1 \right]}$.